Tentamen Partiële Differentiaalvergelijkingen
29 Augustus 2003, 14.00–17.00 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$uu_x + u_y = 1, \quad u(x,x) = \frac{1}{2}x.$$

2. Beschouw de golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met randcondities

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0.$$

Voor een oplossing $u(x,t)$ definieer

$$E(t) = \int_0^\pi [u_t(x,t)^2 + u_x(x,t)^2]dx.$$

(a) Toon aan dat $E(t)$ constant is.

(b) Laat zien dat het bovenstaande randwaardeprobleem hoogstens één oplossing bezit.

3. Los de volgende vergelijking formeel op met behulp van scheiding van variabelen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

met de randcondities

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi; \quad u_t(0,t) = 0, \quad u_t(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Laat zien dat de keuze voor het teken van de constante bij scheiding van variabelen gerechtvaardigd is.

4. Bepaal u als (formele) oplossing van de Laplace vergelijking op het ringvormig gebied $a < \sqrt{x^2+y^2} < b$ als $u = g$ voor $\sqrt{x^2+y^2} = a$ en $u = f$ voor $\sqrt{x^2+y^2} = b$.
Aanwijzing: Gebruik dat in poolcoördinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, de Laplaciaan Δ gegeven wordt door

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}.$$